3. Решение задач многокритериальной оптимизации.

Во многих реальных экономических задачах критериев, которые оптимизируются, может быть несколько. Например, при производстве продукции максимизируется качество и минимизируется себестоимость, при взятии ссуды в банке максимизируется кредитный срок и минимизируется процентная ставка, при выборе места для строительства дома отдыха максимизируются экологические условия и минимизируется расстояние от населенного пункта.

Существует несколько методов решения многокритериальных задач. Одним из наиболее эффективных является метод последовательных уступок, использование которого рассмотрим на примере.

ПРИМЕР 1.

Математическая модель трехкритериальной задачи имеет вид:

$$Z_1 = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max;$$

$$Z_2 = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \min;$$

$$Z_3 = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 16; \\ x_1 + 2x_2 \leq 24; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0.$$

Решить задачу методом последовательных уступок, выбрав уступку по первому критерию $\delta_1=4$, а по второму $\delta_2=5$.

Открываем электронную книгу Excel и, как и для решения однокритериальной задачи определяем ячейки под переменные x_1, x_2, x_3. Для этого в ячейку A1 вводим подпись «Переменные», а соседние три ячейки B1, C1 и D1 вводим значения переменных. Это могут быть произвольные числа, например единицы, далее они будут оптимизироваться. Во второй строке задаем целевые функции. В A2 вводим подпись «Целевые», а в B2 формулой «=2*B1+C1-3*D1» задаем первую целевую функцию $2x_1 + x_2 - 3x_3$. Аналогично в C2 и D2 вводим вторую и третью целевую функцию, вводя в C2 «=B1+3*C1-2*D1», а в D2 «=-B1+2*C1+4*D1». В третью строку вводим левые части ограничений. Для этого вводим в A3 подпись «Ограничения», в B3 формулу «=B1+3*C1+2*D1», в C3 формулу «=2*B1-C1+D1» и в D3 формулу «=B1+2*C1».

Предварительные действия завершены. Вызываем надстройку «Поиск решения» (Solver Add – in) в меню «Сервис». Если этого пункта меню нет, то вызываем меню «Сервис/Надстройки» и ставим флажок напротив раздела «Поиск решения» (Solver Add – in),

появится пункт «Сервис/Поиск решения» (Сервис/Solver...), который следует запустить.

На первом этапе оптимизируем первую целевую функцию. После открытия окна «Поиск решения» (Solver Add – in) в поле «Установить целевую» (Set Target Cell) ставим курсор и делаем ссылку на ячейку B2, щелкая по ней мышью. В окне появится $B$2. В связи с тем, что целевая функция максимизируется, далее нужно проверить, что флажок ниже поля стоит напротив надписи «Равной максимальному значению» (Equal to ... Max ... Value of:). После ставим курсор в поле «Изменяя ячейки» (By Changing Cell) и обводим ячейки с переменными B1, C1 и D1, выделяя ячейки с переменными. В поле появиться $B$1:$D$1. В нижней части окна находится поле «Ограничения» (Subject to the Constraints). Для того, чтобы ввести ограничения, наживают кнопку «Добавить» (Add), откроется окно «Добавление ограничения» (Add Constraints). В левом поле «Ссылка на ячейку» (Cell Reference) вводят ссылку на левую часть первого ограничения – ячейку B3, в центральном окне определяем знак ≥ и в правом «Ограничения» (Constraints) набираем правую часть ограничения – число 1. Нажимаем «ОК», видим, что ограничение появилось в окне. Нажимаем вновь «Добавить» (Add), вводим «C3» «≤» и «16». Вновь нажимаем «Добавить», вводим «D3» «≤» и «24». Для ввода дополнительных ограничений $x_{1,2,3} \geq 0,$ вновь нажимаем «Добавить», ставим курсор в левое поле и обводим ячейки B1, C1 и D1 (результат $B$1:$D$1) в среднем окне ставим «≥» и в правом число 0. Для запуска вычислений нажимаем кнопку «Выполнить» (Solve). Появляется надпись, что решение найдено (Solver Found a Solution). Выбираем «Сохранить найденное решение» (Keep Solver Solution) и «ОК» видим результат: в ячейках B1, C1 и D1 видны значения переменных x_1, x_2, x_3, соответствующие оптимальному решению: 11,2; 6,4 и 0. В ячейки B2 – значение целевой функции 28,8.

На втором этапе оптимизируется вторая целевая функция. Однако, первую, в соответствие с методом последовательных уступок, можно ухудшить первый критерий на величину не более, чем δ_1=4. По этой причине, на втором шаге, значения в ячейке B2 (где хранится первая целевая функция, которая максимизируется) может быть значение, не меньшее, чем 28,8-4=24,8. Вызываем надстройку «Сервис/Поиск решения» (Сервис/Solver...), видим, что все прежние данные остались введенными. Меняем ссылку на целевую функцию. Ставим курсор в поле «Установить целевую» (Set Target Cell) и щелкаем по ячейке C2, в которой находится ссылка на вторую целевую функцию. Так, как вторая целевая минимизируется, то ставим флажок в поле напротив

надписи «Равной минимальному значению» (Equal to ... Max ... Value of:). Вводим дополнительное ограничение, связанное с уступкой по первому критерию. Переводим курсор в поле «Ограничения» (Subject to the Constraints) и нажимаем кнопку «Добавить» (Add), правее поля. В появившемся окне «Добавление ограничения» (Add Constraints) в трех окнах (слева на право) вводим данные «B2», «≥», «24,8». Результат – переменные x_1, x_2, x_3 равны 10,2; 4,4; 0. Вторая целевая функция равна 23,4 (ячейка B2). Первая равна своему минимальному значению 24,8 (ячейка C2).

На третьем этапе делаем уступку по второму критерию. Величина уступки равна δ_2=5. Так, как вторая функция минимизируется, то ее значение не должно превышать 23,4+5=28,4. Вызываем надстройку «Сервис/Поиск решения» (Сервис/Solver...). Меняем ссылку на целевую функцию. Ставим курсор в поле «Установить целевую» (Set Target Cell) и щелкаем по ячейке D2, в которой находится ссылка на третью целевую функцию. Так, как третья целевая максимизируется, то ставим флажок в поле напротив надписи «Равной максимальному значению» (Equal to ... Max ... Value of:). Вводим дополнительное ограничение, связанное с уступкой по второму критерию. Переводим курсор в поле «Ограничения» (Subject to the Constraints) и нажимаем кнопку «Добавить» (Add). В появившемся окне «Добавление ограничения» (Add Constraints). вводим данные «C2», «≤», «28,4». Результат – переменные x_1, x_2, x_3 равны 10,76; 6,62; 1,11. Целевые функции равны, соответственно, 24,8; 28,4 и 6,93. Это окончательный ответ. Все дополнительные условия соблюдены.

ПРИМЕР 2.

Молочный комбинат, исследовав конъюнктуру местного рынка, решил выпускать новый вид йогурта, который был бы конкурентно способен. При этом, необходимо разработать план организации производства для выпуска данного продукта. Основными затратами на разработку являются затраты на модернизацию оборудование x и затраты на научные исследования y. При исследовании установлено, что себестоимость единицы продукции при этом будет зависеть от затрат как $F_1(x, y) = 12 + ax + by$, а качество продукции как $F_2 = 6 + cx + dy$. Ставится задача минимизировать себестоимость (цену) данного продукта и максимизировать качество выпускаемой продукции. Из двух целевых функций основной считается цена (себестоимость продукции). По фактору «цена» можно сделать уступку 3 денежные единицы. Также на факторы накладываются дополнительные ограничения:

$$\begin{cases} 5x + 4y \le 40; \\ 2x + y \ge 8; \\ 0 \le x \le 6; \quad y \ge 0. \end{cases}$$

Задача решается методом последовательных уступок аналогично предыдущей.